Невидимое касание

Д.Прокопенко, Д.Швецов
2025 год

Вот уже больше двадцати лет каждую весну проводится устная олимпиада по геометрии, которая рассчитана на школьников, увлекающихся геометрией. В уже далеком 2010-м году участникам этой олимпиады 8 и 9 классов предлагалась следующая задача (под номером шесть, т.е. самая трудная), с которой справились всего два участника.

Серединные перпендикуляры к сторонам BC и AC остроугольного треугольника ABC пересекают прямые AC и BC в точках M и N. Пусть точка C движется по описанной окружности треугольника ABC, оставаясь в одной полуплоскости относительно AB (при этом точки A и B неподвижны). Докажите, что прямая MN касается фиксированной окружности (рис. 1).

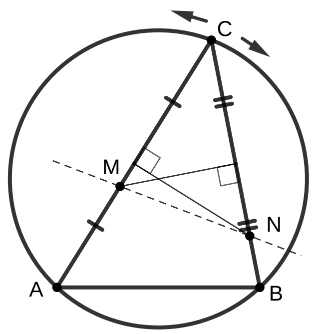

Рис. 1

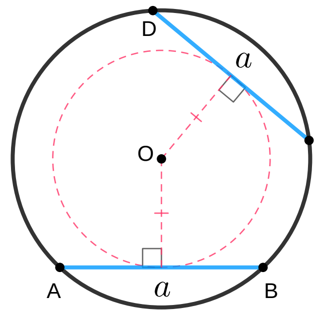

Рис. 2

Эту задачу придумал первый автор статьи, а вся заметка родилась из совместных попыток разобраться с вопросом, который постоянно задают школьники(и учителя) — как такое можно научиться решать? Авторы надеются, что, прочитав статью, читатель сможет самостоятельно решить эту задачу, а также несколько других похожих. Если возникнут трудности, то в конце статьи есть указания к решению.

Удивительно, но для решения достаточно знания довольно простых, но глубоких фактов. Сложность обычно заключается в том, что бы заметить, узнать их в задаче. Например, из школьного курса хорошо известен факт, который мы будем постоянно далее использовать, поэтому назовем его

Основной факт. *Равные хорды равноудалены от центра окружности. Следовательно, они касаются фиксированной окружности* (рис. 2).

Попробуем сначала решить хорошо известную задачу.

1. *Внутри окружности запустили луч света (не проходящий через центр окружности). Луч света отражается от окружности по правилу «угол падения равен углу отражения». Докажите, что луч света всё время касается фиксированной окружности.*

Доказательство. Уточним сначала, как понимать условие «угол падения равен углу отражения» для луча света внутри круглого зеркала. Это значит, что две хорды с общей вершиной образуют равные углы с касательной (рис. 3).

Заметим на рис. 4 равные прямоугольные треугольники. Поэтому две соседние хорды (следовательно и все остальные) будут равны и на одном расстоянии от центра данной окружности O ($h_1 = h_2 = \ldots$). Как мы уже знаем из **Основного факта** все эти хорды касаются фиксированной окружности с центром O. Задача решена.

Далее во всех задачах надо доказать, что некоторая подвижная прямая касается фиксированной окружности. Мы будем решать эти задачи по такому плану:

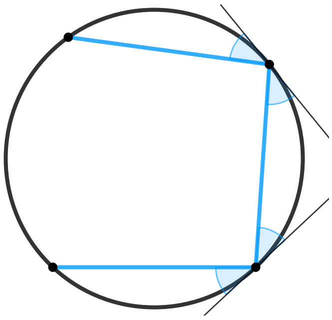

Рис. 3

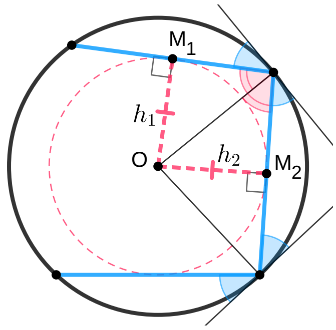

Рис. 4

1. найдем фиксированную **(!)** вспомогательную окружность с центром O;
2. докажем, что на этой окружности прямые высекают равные хорды (обычно с помощью равных вписанных углов);
3. тогда все они (а также прямые, их содержащие) находятся на равном расстоянии от точки O и касаются фиксированной окружности.

Конечно, эта конструкция не всегда решает подобные задачи, тогда надо искать другие идеи.

2. *Пусть зафиксирован отрезок $AC = 1$, точка B движется в одной полуплоскости относительно прямой AB так, что $\angle ABC = 60°$. Пусть AA_1, CC_1 — высоты треугольника ABC. Докажите, что прямая A_1C_1 касается фиксированной окружности.*

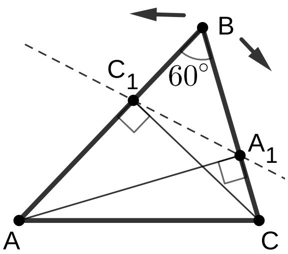

Рис. 5

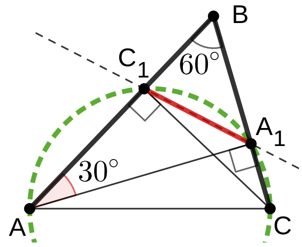

Рис. 6

Доказательство. Заметим, что точки A, C, A_1 и C_1 лежат на одной фиксированной (!) окружности (почему ?) с диаметром AC. Из прямоугольного треугольника AA_1B $\angle A_1AB = 30°$. Равные вписанные углы опираются на равные хорды. Следовательно, длина хорды A_1C_1 постоянна. Из **Основного факта** все эти хорды касаются фиксированной окружности с центром в середине AC. Задача решена.

Комментарий. Для доказательства постоянства отрезка A_1C_1 можно было воспользоваться теоремой о подобии треугольников A_1BC_1 и ABC (например, по двум углам). При этом коэффициент подобия k равен $\cos\angle B$. В нашем случае $k = \cos 60° = 0.5$. Поэтому $A_1C_1 = k \cdot AC = 0.5AC$, т.е. отрезок A_1C_1 постоянной длины.

3. *Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. От точки A к точке B по дуге окружности ω_1 движется точка P. Лучи PA и PB повторно пересекают окружность ω_2 в точках A_1 и B_1. Докажите, что прямая A_1B_1 касается фиксированной окружности (рис. 7).*

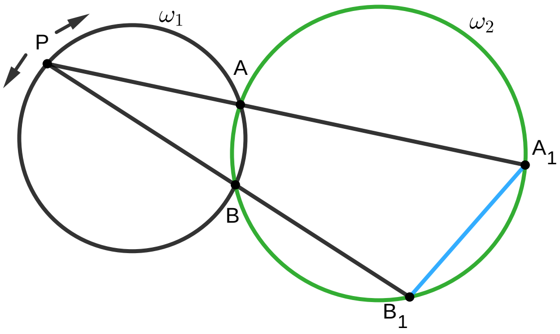

Рис. 7

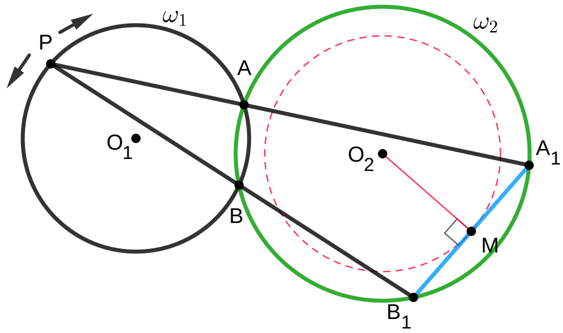

Рис. 8

Доказательство. Заметим, что концы отрезка A_1B_1 скользят по фиксированной окружности ω_2 с центром O_2 (рис. 8). Поэтому нам достаточно доказать, что длина этого отрезка постоянна. По формуле угла между секущими угол APB равен полусумме дуг AB и A_1B_1 окружности ω_2.

Поскольку вписанный в ω_1 угол APB и дуга AB окружности ω_2 — постоянны, то и дуга A_1B_1 тоже постоянна. Из **Основного факта** все эти хорды касаются фиксированной окружности с центром в O_2. Задача решена.

В решении подобных задач часто надо найти вспомогательную окружность (п. 1 из нашего плана). Для этого можно использовать несколько важных фактов. Далее для краткости центр вписанной окружности треугольника будем называть **инцентр**, а точку пересечения высот — **ортоцентр**.

Факт 1 (ГМТ инцентров). *На окружности даны точки B и C, точка A движется по дуге BC. Тогда инцентр I треугольника ABC движется по дуге окружности.* (На рис. 9 — два положения точки A).

Факт 2 (ГМТ ортоцентров). *На окружности даны точки B и C, точка A движется по дуге BC. Тогда ортоцентр H треугольника ABC движется по дуге окружности* (рис. 10).

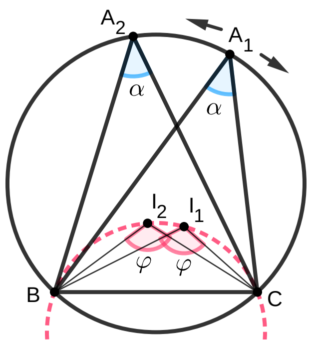

Рис. 9: ГМТ инцентров

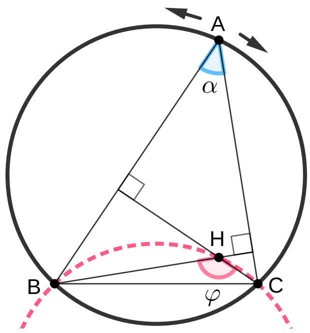

Рис. 10: ГМТ ортоцентров

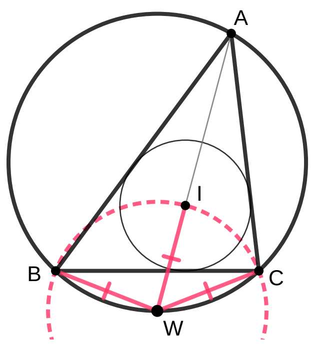

Рис. 11: Теорема трилистника

В подобных задачах всегда полезно задать себе вопрос: а что не меняется при движении точки A по окружности? Первый очевидный ответ, что равны вписанные углы BAC, опирающиеся на дугу BC (рис. 9 и рис. 10). А что еще не меняется? Пусть $\angle BAC = \alpha$.

Доказательство Факта 1. По формуле угла между биссектрисами $\varphi = \angle BIC = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$. Тогда все такие точки I лежат на дуге окружности. Доказательство Факта 2 аналогично. Только теперь по формуле угла между высотами $\varphi = \angle BHC = 180^\circ - \alpha$.

Можно усилить результат и уточнить положение окружности в ГМТ инцентров.

Теорема трилистника (лемма о трезубце). *Пусть I — инцентр треугольника ABC, W — середина дуги BC, не содержащей точку A. Тогда $WB = WC = WI$* (рис. 24).

Следовательно, *инцентры всевозможных треугольников* ABC *из* ***Факта 1*** *лежат на дуге окружности с центром в середине дуги* BC *(не содержащей точку* A*) и проходящей через точки* B *и* C.

Разберем задачу с Санкт-Петербургской олимпиады по математике 2018 года, автор С. Берлов.

4. *На окружности даны точки* A *и* B, *точки* C *и* D *движутся по дуге* AB *так, что* $CD = 1$. *Пусть* I_C, I_D *центры вписанных окружностей треугольников* ABC *и* ABD. *Докажите, что прямая* $I_C I_D$ *касается фиксированной окружности (рис. 12).*

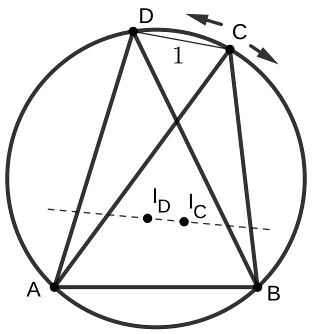

Рис. 12

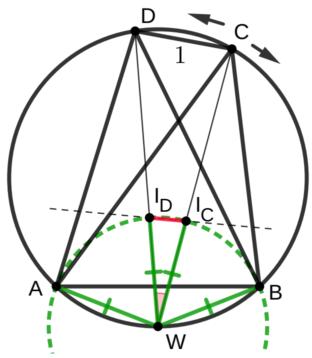

Рис. 13

Как мы уже знаем, для любого положения точки C на дуге AB все инцентры треугольников ABC находятся на окружности ω с центром в точке W, где W — середина дуги AB, не содержащей точку C и радиусом $R = WA$ (рис. 13). Итак, фиксированную окружность мы нашли, $I_C I_D$ — хорда этой окружности. Осталось доказать, что эта хорда — постоянной длины.

Поскольку $CD = 1$, то вписанный угол CWD — постоянный. Тогда и в окружности ω центральный угол $I_C W I_D$ — тоже постоянный. Следовательно, длина хорды $I_C I_D$ этой окружности не меняется. Тогда все эти хорды касаются фиксированной окружности с центром в W. $\square$

Предлагаем читателям попробовать свои силы и порешать задачу, с которой началась эта статья. На сайте [1] можно посмотреть довольно красивую анимацию этой задачи (№6627). Полезно прорешать задачи ниже. В конце статьи даны указания к решениям.

5. *Серединные перпендикуляры к сторонам* BC *и* AC *остроугольного треугольника* ABC *пересекают прямые* AC *и* BC *в точках* M *и* N. *Пусть точка* C *движется по описанной окружности треугольника* ABC, *оставаясь в одной полуплоскости относительно* AB *(при этом точки* A *и* B *неподвижны). Докажите, что прямая* MN *касается фиксированной окружности (рис. 14).*

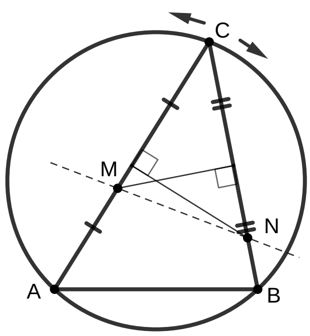

Рис. 14: к задаче 5

Задачи для самостоятельного решения

6. *Для произвольной точки P на дуге AB окружности опустили перпендикуляры AG и BH на прямые BP и AP. Докажите, что прямая GH касается фиксированной окружности.*

7. *Для произвольной точки C на дуге AB окружности провели биссектрисы углов CAB и CBA до пересечения с окружность в точках P и Q. Докажите, что прямая PQ касается фиксированной окружности. (рис. 15).*

8. *В окружности провели диаметр AB. Для произвольной точки C на одной полуокружности построили вписанную окружность в треугольник ABC. Через точки её касания с его катетами провели прямую MN. Докажите, что эта прямая касается фиксированной окружности (рис. 16).*

Несколько задач про хорду постоянной длины.

9. *На окружности ω даны точки A и B, точки C и D движутся по дуге AB так, что $CD = 1$. Пусть биссектрисы углов BAC и ABD пересекают ω в точках P и Q. Докажите, что прямая PQ касается фиксированной окружности (рис. 17).*

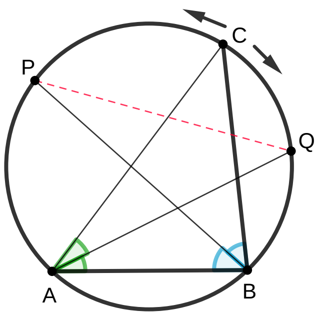

Рис. 15

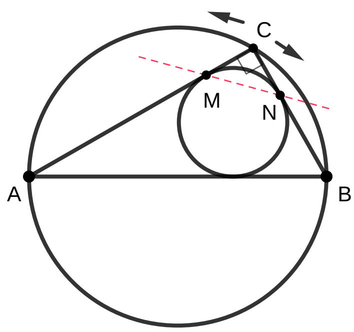

Рис. 16

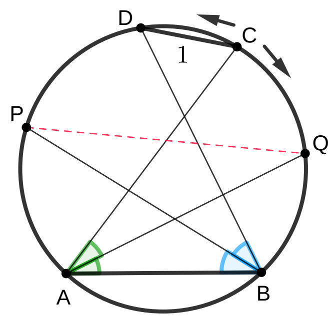

Рис. 17

10. *На окружности даны точки A и B, точки C и D движутся по дуге AB так, что $CD = 1$. Пусть O_C, O_D центры вневписанных окружностей треугольников ABC и ABD, касающихся стороны AB. Докажите, что прямая O_CO_D касается фиксированной окружности.*

11. *На окружности даны точки A и B, точки C и D движутся по дуге AB так, что $CD = 1$. Докажите, что прямая, проходящая через точки пересечения а) высот (рис. 18); б) медиан (рис. 19) треугольников ABC и ABD касается фиксированной окружности.*

На рис. 18 и 19 отмечены точки пересечения высот (H_C и H_D) и медиан (M_C и M_D) треугольников ABD и ACD.

Контрольный вопрос: а что, если попробовать взять вместо точек пересечения биссектрис (задача 4), высот и медиан (задача 11) какие-нибудь другие замечательные точки? Например, центры описанных окружностей этих треугольников?

12. *Решите задачу 5.*

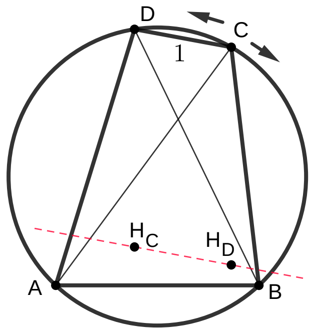

Рис. 18

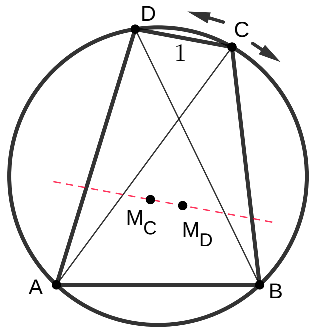

Рис. 19

Заключение

Как это часто бывает содержательные олимпиадные задачи имеют выход на серьезную математику. Так казалось бы самая простая задача 1 из нашей подборки относится к разделу математики, который изучает математические бильярды в различных фигурах. Вот и в задаче 1 можно было задать вопросы, например, такие: 1) замкнется траектория или нет, а если замкнется, то при каких условиях? 2) есть ли на окружности такая дуга, куда никогда не попадет луч? Ответить на эти вопросы поможет статья А. Землякова [2] «Математика бильярда» журнала Квант.

Теперь хотим пригласить читателя на продолжение нашей прогулки. Путешествие начинается со следующего построения. Отметим на плоскости произвольную точку F и прямую ℓ. Далее, на прямой ℓ отметим несколько точек и каждую, из полученных точек соединим с точкой F(рис. 20).

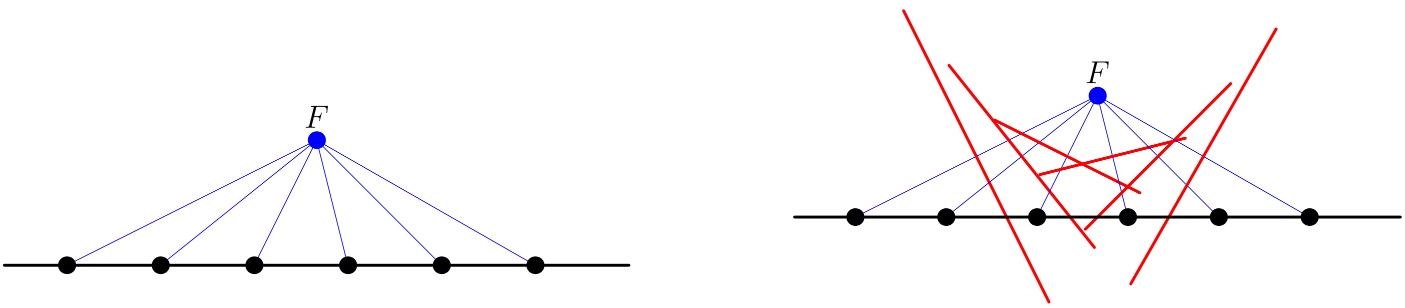

Рис. 20

Пока ничего интересного. Давайте теперь к каждому полученному отрезку построим серединный перпендикуляр (рис. 20). Пока серединных перпендикуляров мало, сложно сразу сказать, какую фигуру они огибают. Добавив точек, получим такую картину.

И тут уже видно, что красные прямые (серединные перпендикуляры) огибают знакомую всем с восьмого класса кривую — параболу! Вот как раз тут-то всё и начинается. Продолжить знакомство с темой мы предлагаем по книге В. Г. Болтянского "Огибающая".

В 2017 году в журнале «Квант» в статье [3] был описан совсем другой подход к огибающим к гиперболам, параболам и эллипсам. На рис. 22 из этой статьи прямая отсекает от параболы криволинейную фигуру постоянной площади. Тогда она касается (огибает) другую параболу.

Нам этом мы заканчиваем наш небольшой рассказ. Но как видно — это только начало!

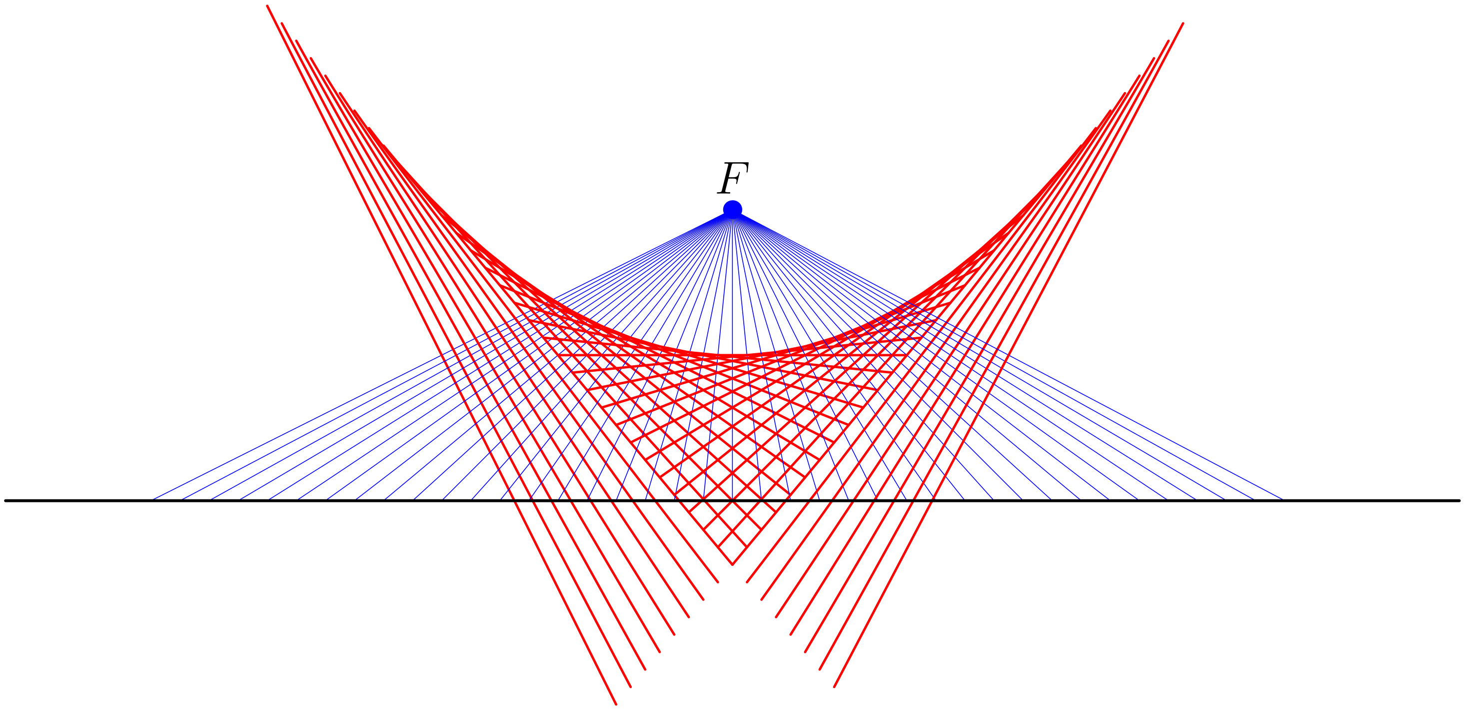

Рис. 21: Парабола — огибающая

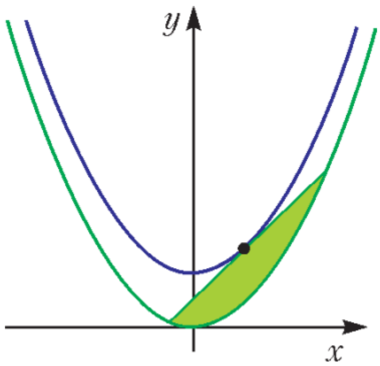

Рис. 22

Указания

К задаче 6. Сравните с задачей 2.

К задаче 7. 1) По формуле угла между хордами угол φ между лучами AP и BQ равен полусумме дуг PCQ и AB. 2) по формуле угла между биссектрисами $\varphi = 90^\circ + 0.5\angle C$. Следовательно, угол φ и дуга AB постоянны. Тогда из 1) угловая мера дуги PCQ тоже постоянна.

К задаче 8. Продолжите прямую MN до пересечения с окружностью и докажите, что это точки P и Q из задачи 7.

Задача 8 является переформулировкой задачи М. Волчкевича Турнира городов 2021-2022 годов. *В прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной 1, вписали окружность. Через точки её касания с его катетами провели прямую. Отрезок какой длины может высекать на этой прямой окружность, описанная около исходного треугольника?* М. Волчкевич, Турнир городов, 2021/22 года.

Решение этой задачи можно посмотреть на сайте [1] №12767, что поможет доказать и указание к этой задаче.

К задаче 9. (рис. 23) Сумма дуг AD, DC и CQ – постоянна. Угловая мера дуги DC — тоже. P и Q — середины дуг AD и BC.

К задаче 10**.** Для решения этой задачи надо знать полную формулировку теоремы трилистника или как ее еще иногда называют «Теорема о куриной лапке». Второе название понятно из рис. 24. Заметим, что точки I и O_a симметричны относительно середины дуги W. При движении точки A по дуге BC точка I движется по дуге BC окружности трилистника (это было использовано в задаче 4). Одновременно точка O_a движется по своей дуге той же окружности симметрично точке I относительно точки W. Осталось вспомнить решение задачи 4 и учесть симметрию.

К задаче 11**.** б) Можно использовать еще одно полезное геометрическое место точек.

Факт 3 (ГМТ точек пересечения медиан). *На окружности даны точки B и C, точка A движется по дуге BC. Тогда точка пересечения медиан I треугольника ABC движется по дуге окружности.* (На рис. 25 — два положения точки A).

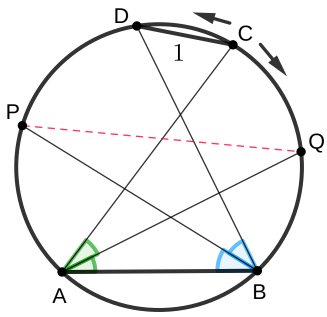

Рис. 23: К задаче 9

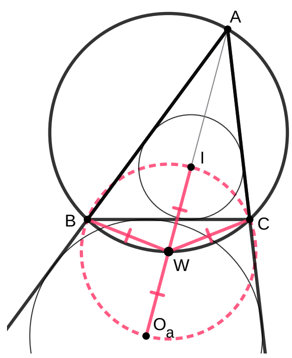

Рис. 24: к задаче 10

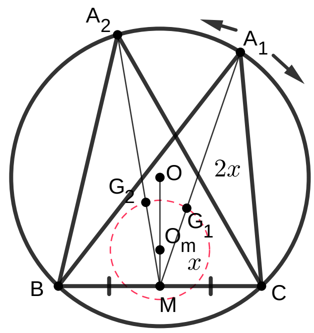

Рис. 25: ГМТ точек пересечения медиан

Вернемся **к задаче** 5. Перед тем, как читать указания, можно попробовать решить задачу самостоятельно по (рис. 26).

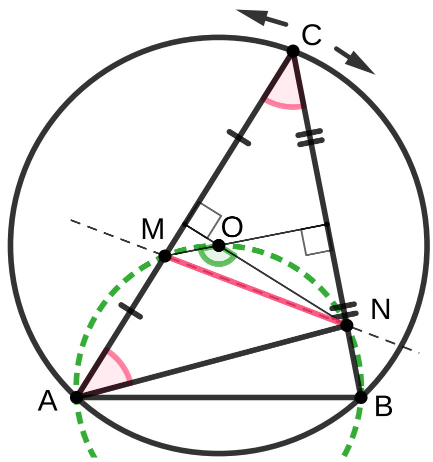

Рис. 26: К задаче 5

Более подробные указания: 1) Найдите фиксированную вспомогательную окружность. 2) Докажите (двумя способами), что на этой окружности прямые высекают равные хорды MN. Для этого надо доказать, что вписанные углы, опирающиеся на эту хорду — постоянны. Попробуйте доказать независимо постоянство углов MAN и MON. На сайте [1] можно посмотреть подробное решение этой задачи №6627.

Список литературы

[1] Информационно – поисковая система «Задачи по геометрии» http://zadachi.mccme.ru/

[2] А. Земляков, «Математика бильярда», Квант, 1976 год, №5.

[3] С. Дворянинов, П. Кожевников, "Какие бывают повороты", Квант, 2017 год, №5.

[4] Д. Фукс, С. Табачников, «Сегменты постоянной площади», Квант, 1990 год, №8.

[5] О. Котий, А. Майоров, «Семейство прямых, делящих площадь пополам», Квант, 1990 год, №8.

[6] Сайт «Математические этюды»,
https://etudes.ru/sketches/parabola-envelope/
https://etudes.ru/sketches/ellipse-envelope/